Лекция 6 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Тлеулесова А.М.

1) Понятие производной функции Свойства дифференцируемых

функций. Таблица производных основных элементарных функций.

2) Дифференциал. (Определение дифференциала. Свойства дифференциала. Инвариантность

формы первого дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

3) Производная сложной функции и обратной функции.

4) Производные функций заданных параметрически, или неявно.

5) Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Предел отношения приращения функции *y=f(x)* к приращению аргумента *(x)*, когда приращение аргумента *(Δx)* стремится к нулю (если этот предел существует и является конечным) называется **производной функции**

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f^{/}(x)$$

Операция нахождения производной называется дифференцированием.

ПРИМЕР Найти производную функции $y = x^2$.

Возьмем произвольное $x \in D(y) = R$ и дадим ей приращение Δx. Функция получит приращение

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + \Delta x^2.$$

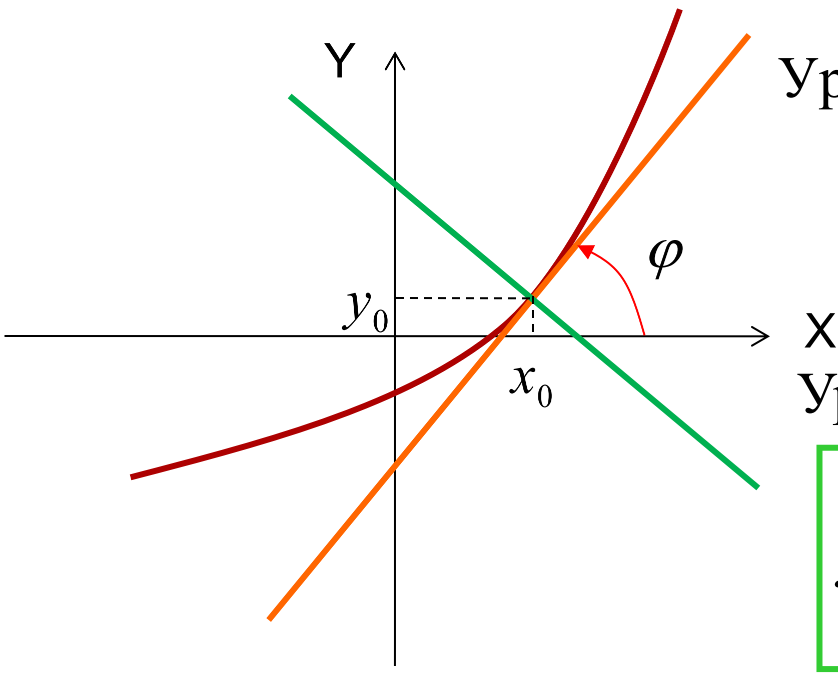
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x + 0 = 2x.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная функции в точке x_0 есть угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой *y=f(x)* в точке x_0.



Уравнение касательной в точке x_0:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Уравнение нормали в точке x_0:

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть функции *u(x)* и *v(x)* имеют производные, тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций также имеют производные, которые выражаются следующим образом:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad (Cu)' = Cu'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v(x) \neq 0)$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Производная сложной функции *f(g(x))* вычисляется по формуле:

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g\right)\cdot g'\left(x\right)$$

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

ПРИМЕРЫ.

1) $$\left(3\cdot 7^{x}-4x^{5}+2\right)'= \quad 3\cdot 7^{x}\ln 7-20x^{4}+0.$$

2) $$\left(\sin x\cdot \log_{3}x\right)'=\left(\sin x\right)'\cdot \log_{3}x+\sin x\cdot\left(\log_{3}x\right)'=$$

$$=\cos x\cdot \log_{3}x+\sin x\cdot\frac{1}{x\ln 3}.$$

3) $$\left(\frac{arctgx}{\ln x}\right)'=\frac{\left(arctgx\right)'\cdot \ln x-arctgx\cdot\left(\ln x\right)'}{\left(\ln x\right)^{2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{1+x^{2}}\cdot \ln x-arctgx\cdot\frac{1}{x}}{\left(\ln x\right)^{2}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Логарифмической производной* функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е. $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называют *логарифмическим дифференцированием.* В случаях, когда надо найти производную от функции вида $\boldsymbol{y(x) = u(x)^{v(x)}}$, то предварительное логарифмирование приводит к формуле

$$y' = (u^v)' = (e^{v \ln u})' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'$$

Пример 3. Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^3}$.

Решение. Логарифмируя данную функцию, получаем $\ln y = x^3 \ln \sin 2x$. Дифференцируем обе части последнего равенства по x: $(\ln y)' = (x^3)' \ln \sin 2x + x^3 (\ln \sin 2x)'$. Отсюда $\dfrac{y'}{y} = 3x^2 \ln \sin 2x + x^3 \dfrac{1}{\sin 2x} 2\cos 2x$. Далее, $y' = y(3x^2 \ln \sin 2x + 2x^3 ctg\, 2x)$. Окончательно имеем:

$y' = (\sin 2x)^{x^3} (3x^2 \ln \sin 2x + 2x^3 ctg\, 2x)$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

то производная функции y по переменной x, т.е. y'_x вычисляется по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть *y=f(x)* определена на промежутке *X* и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$. Тогда существует конечная производная

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Дифференциалом функции называется главная линейная часть приращения функции. Дифференциал функции вычисляется по формуле

$$d\big(f(x)\big) = f'(x)dx$$

Если Δx **достаточно мало по абсолютной величине**, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка малости, чем Δx, имеет место **приближенное равенство**:

$$\Delta y \approx dy$$

или

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x\,.$$

Основные свойства дифференциала

1) $dc = 0$, где $C = \text{const}$;

2) $d\left(CU\right) = C \cdot dU$;

3) $d\left(U \pm \vartheta\right) = dU \pm d\vartheta$;

4) $d\left(U \cdot \vartheta\right) = U \cdot d\vartheta + \vartheta \cdot dU$;

5) $d\left(\dfrac{U}{\vartheta}\right) = \dfrac{\vartheta\, dU - U\, d\vartheta}{\vartheta^2}$, где $\vartheta \neq 0$;

6) $d\, f\left(U\right) = f'\left(U\right) dU$.

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т.е. $(y')'$.

Вторая производная обозначается y'' или $f''(x)$. Если существует производная от второй производной, то ее называют третьей производной и обозначают $f'''(x)$ или y'''

$$f'''(x) = (f''(x))'.$$

Производной $n-$ порядка называют производную от производной $(n-1)-$ го порядка. Производную $n-$го порядка обозначают $f^{(n)}(x)$ или $y^{(n)}$

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \qquad a > 0;$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n};$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$